

## سری هشتم تمرین‌های ریاضی ۲

۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۷

### نمونه سوال‌های امتحانی

**سوال ۱ (نیم‌سال دوم ۹۳-۹۲):** حجم بیضی‌وار با معادله  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  را محاسبه کنید ( $a, b, c$  اعداد حقیقی مثبت‌اند).

**سوال ۲ (نیم‌سال اول ۹۵-۹۴):** فرض کنید  $D$  ناحیه کراندار در صفحه  $xy$  است که بین خط  $y = 2x$  و سهمی  $y = x^2$  قرار دارد. حجم ناحیه‌ای از فضا را که زیر سهمی‌وار  $z = 2x^2 + y^2$  و بالای  $D$  قرار دارد، حساب کنید.

**سوال ۳ (نیم‌سال اول ۹۵-۹۴):** فرض کنید  $E$  ناحیه‌ای از فضا است که در داخل استوانه  $x^2 + y^2 = 1$ ، بالای صفحه  $xy$  و زیر مخروط  $z^2 = 4x^2 + 4y^2$  واقع است. انتگرال سه‌گانه  $\iiint_E x^2 dx dy dz$  را حساب کنید.

### تمرین‌های برگزیده

**تمرین ۱:** حجم ناحیه محدود به سهمی‌گون  $z = x^2 + y^2$  و صفحه  $z = 2y$  را محاسبه کنید.

**تمرین ۲:** حجم هرم مثلث‌القاعده‌ای که قاعده آن در صفحه  $z = -6$  قرار دارد و وجوه آن صفحات قائم  $y = 0$  و  $y - x = 4$  و صفحه مورب  $z = 4 - 2x + y$  است را بدست آورید.

**تمرین ۳:** حجم داخل کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  و بیرون سهمی‌گون  $z = 1 + x^2 + y^2$  را بدست آورید.

**تمرین ۴:** مقدار  $\iiint_D 2y^2 e^{xy} dx dy dz$  که  $D = \{(x, y, z) : y - x \geq 0, x \geq 0, y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$  را بیابید.

**تمرین ۵:** انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_1^3 \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 z e^{\frac{y}{z}} dx dy dz$$

**تمرین ۶:** فرض کنید  $T$  جسم سه‌بعدی محصور به استوانه‌ی سهموی  $y = x^2$  و صفحات  $y = 0$  و  $y + z = 1$  و  $z = 0$  است. انتگرال  $\iiint_T z dV$  را حساب کنید.

**تمرین ۷:** مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\iiint_{\Omega} \frac{dV}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}$$

که در آن  $\Omega$  ناحیه  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$  می‌باشد. (به مقادیر مختلف  $\alpha \in \mathbb{R}$  توجه شود)

**تمرین ۸:** مطلوب است محاسبه انتگرال  $\iiint_V z dx dy dz$  که در آن  $V$  ناحیه واقع در یک هشتم اول بوده که از بالا به صفحه  $z = 1$  و از پایین به صفحه  $z = x + y - 1$  محدود است.

تمرین ۹: فرض کنید  $D$  ناحیه محصور به رویه  $z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$  از پایین و کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  از بالا باشد. انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\iiint_D (1 + x + y) dV$$

تمرین ۱۰: فرض کنید  $D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{10} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} \leq 1\}$ . مقدار انتگرال را بدست آورید:

$$\iiint_D \frac{dx dy dz}{(1 + \frac{x}{10} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3})^6}$$

تمرین ۱۱: از تقاطع صفحه  $x + y + z = 1$  با بیضی‌گون  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$  دو ناحیه بدست می‌آید. حجم ناحیه کوچک‌تر را بیابید.  
(راهنمایی: ابتدا با یک تغییر متغیر، بیضی‌گون را به یک دایره تبدیل کنید و سپس صفحه را با صفحه‌ای با معادله ساده‌تر که از همان فاصله تا مبدا می‌گذرد عوض کنید.)

تمرین ۱۲: حجم محدود به سطح به معادله  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1$  را بیابید.